מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

פתרון מבחן סוף סמסטר בקורס "טורי פורייה והתמרות אינטגרליות" (21183)

המרצה: פרופ' מיכאל קרויטר

סמסטר ב' תשפ"ד, מועד א', 22/07/2024

הוראות לנבחנים:

משך הבחינה: **שלוש שעות** (180 דקות).

חומר העזר המותר: מחשבון פשוט (לא גרפי), ודפי הנוסחאות המצורפים לבחינה בלבד.

פתרו 4 שאלות בלבד מתוך 5. משקל כל שאלה 25 נקודות (למעט שאלה 1 שכוללת 5 נקודות בונוס).

במחברת בה יופיעו פתרונות של יותר מארבע שאלות, הציון יחושב על פי **ארבע השאלות הראשונות.** הקפידו למחוק פתרונות שאינכם מעוניינים שייבדקו.

אנא **ציינו בתחילת המחברת את מספרי השאלות שבחרתם.**

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים. **נמקו היטב** את תשובותיכם:

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n^5\pi)}{n\ln n}$. (7 נק')

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(n^3\pi)e^{n^3}$. (6 נק')

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{n/2}}$. (6 נק')

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{n^2}$. (6 נק')

פתרון

א. הארגומנט של הקוסינוס הוא מספר שלם כפול π. אם n זוגי אז גם n^5 זוגי ואם n אי-זוגי אז גם n^5 אי-זוגי. מכיוון ש- $\cos(k\pi)=(-1)^k$, ניתן במקרה הנוכחי לכתוב $\cos(n^5\pi)=(-1)^n$. כלומר הטור הנתון הוא למעשה: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. זה טור חיובי, ולכן התכנסות שקולה להתכנסות בהחלט. המכנה מהווה פונקציה מונוטונית עולה של n ולכן המקדמים מהווים פונקציה יורדת של n. נשתמש לכן במבחן האינטגרל, כלומר נבחן את $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u}=\infty$. כאן השתמשנו בהצבה $u=\ln x$. קיבלנו שהאינטגרל מתבדר ולכן גם הטור הנתון מתבדר.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 5810201
טלפקס: 03-5026560
52 Golomb St., Holon 5810201 Israel
www.hit.ac.il Tel/Fax: 972-3-502-6560
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

ב. הארגומנט של הסינוס הוא מספר שלם כפול π. פונקציית הסינוס מתאפסת בערכים אלה ולכן הטור הנתון הוא טור של אפסים. הטור מתכנס בהחלט לאפס.

ג. הטור מחליף סימן. נבחן התכנסות בהחלט, כלומר נבחן את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n/2}}$. נשתמש כעת במבחן ההשוואה: $\forall n \geq 4,\ \frac{1}{n^{n/2}} \leq \frac{1}{n^2}$. השווינו את זנב הטור לטור הרמוני מוכלל שידוע שמתכנס ולכן גם טור הערכים המוחלטים מתכנס והטור המקורי מתכנס בהחלט. לחילופין אפשר להשתמש כאן גם במבחן השורש.

ד. הטור לא מקיים את התנאי ההכרחי ולכן מתבדר.

<u>שאלה 2</u>

תהי: $f(x)=\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{(1+\sin x)^3}$.

א. חשבו $f^{(3)}(0)$. (7 נק')

ב. חשבו $f^{(4)}(0)$. (8 נק')

ג. חשבו $f^{(5)}(0)$. (10 נק')

פתרון

א. נפתח את המונה ואת המכנה בטור טיילור:

$\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{(1+\sin x)^3}=\frac{1+x^2+x^4/2+...+2-x^2+x^4/12+...-3}{(1+x+...)^3}=\frac{7x^4/12+...}{(1+x+...)^3}$. שלוש הנקודות במונה מציינות איברים מסדר מעל 4 (למעשה מעל 5, כי הפונקציה במונה זוגית), ובמכנה סדר מעל 1. מכיוון שהמכנה רגולרי בראשית והמונה מתחיל ב- x^4 הנגזרת השלישית בראשית מתאפסת: $f^{(3)}(0)=0$.

ב. אם נגזור את הביטוי כמכפלה התרומה היחידה לנגזרת הרביעית תתקבל מגזירה רביעית של המונה, כי הנגזרות הנמוכות יותר שלו מתאפסות אחרי שנציב $x=0$. לכן מתקבל: $f^{(4)}(0)=\frac{7}{12}\cdot 4!=14$.

ג. איברים מסדר גבוה יותר ממה שכתבנו עד כה במונה יהיו מסדר 6 ומעלה ולכן הם כולם יתאפסו אחרי שנגזור 5 פעמים ונציב $x=0$. מצד שני, אם נגזור את התרומה של המונה פחות מארבע פעמים גם נקבל אפס. לכן מספיק לבחון מה מתקבל מפיתוח של המכנה עד לסדר ראשון:

$\frac{7x^4/12+...}{(1+x+...)^3}=\frac{7x^4/12+...}{1+3x+...}=(7x^4/12+...)(1-3x+...)=7x^4/12-7x^5/4+...$. מכאן מתקבל:

$f^{(5)}(0)=-\frac{7}{4}\cdot 5!=-210$.

שאלה 3

א. פתחו את הפונקציה $f\left(x\right)=e^{-|x|}$ לטור פורייה טריגונומטרי בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$. (15 נק')

ב. השתמשו בסעיף הקודם כדי לכתוב את הפונקציה הנתונה כטור פורייה מרוכב. **פשטו את הביטוי** ככל הניתן. (5 נק')

ג. השתמשו בסעיף א' כדי לחשב את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}$. **נמקו היטב**. (5 נק')

פתרון

א. הפונקציה זוגית ולכן הסינוסים נופלים מהפיתוח. נמצא את המקדמים של הקוסינוסים ע"י אינטגרציה

בחצי הקטע: $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}dx=-\frac{1}{\pi}e^{-x}\Big|_0^{\pi}=\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\frac{e^{-x}}{1+n^2}\left(n\sin(nx)-\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)$ (כאן השתמשנו בדף הנוסחאות). סה"כ מתקבל:

$$f\left(x\right)=e^{-|x|}\sim\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos(nx).$$

ב. נציב $\cos(nx)=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ ונקבל:

$$f\left(x\right)=e^{-|x|}\sim\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}e^{inx}.$$

ג. $x=0$ היא נקודת רציפות של הפונקציה ולכן מתקיימת בה התכנסות נקודתית. נציב ונקבל: $1=e^{-|0|}=\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}$. אנחנו מזהים את הטור המבוקש כחלק מהביטוי הזה. העברת אגפים נותנת: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{1-e^{-\pi}}{2}$.

שאלה 4

א. מצאו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=x^2\cos xe^{-x^2}$. (15 נק')

ב. האם ההתמרה ההפוכה של ההתמרה שקיבלתם בסעיף הקודם נותנת את הפונקציה $f(x)$ בכל נקודה? **נמקו היטב**. (5 נק')

ג. חשבו את האינטגרל: $\int_0^{\infty}x^2\cos xe^{-x^2}\,dx$. **פשטו את הביטוי** ככל הניתן. (5 נק')

פתרון

א. ההתמרה של e^{-x^2} היא $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-k^2/4}$. כפל של הפונקציה המקורית ב- x^2 מתבטא בהפעלה של האופרטור הדיפרנציאלי $-\frac{d^2}{dk^2}$ על הפונקציה אחרי ההתמרה, מה שמוביל ל- $-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{k^2}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-k^2/4}$. כפל של הפונקציה כעת ב- $\cos x$ נותן: $F(k)=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{(k-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-(k-1)^2/4}+\left(\frac{(k+1)^2}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-(k+1)^2/4}\right)$.

ב. הפונקציה המקורית גזירה ברציפות ואינטגרבילית בהחלט על הציר הממשי ולכן ההתמרה ההפוכה מתכנסת נקודתית בכל מקום לפונקציה המקורית.

ג. אילו היה נתון אינטגרל בגבולות $(-\infty,\infty)$ אז זו הייתה ההגדרה של 2π כפול ההתמרה של הפונקציה הנתונה עבור $k=0$. אבל הפונקציה זוגית ולכן אפשר לכתוב:

$$\int_0^\infty x^2\cos xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty x^2\cos xe^{-x^2}\,dx=\frac{2\pi}{2}F(0)=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-1/4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-1/4}\right)=\frac{\sqrt{\pi}e^{-1/4}}{8}.$$

<u>שאלה 5</u> (שימו לב: סעיף ג' הוא סעיף בונוס – לפותרי שאלה זו בלבד)

נתון טור הפונקציות: $\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n e^{-n|x|}}{n}$.

א. האם הטור מתכנס נקודתית $\forall x\in\mathbb{R}$? אם כן, מהי הפונקציה הגבולית, אם לא מדוע? (13 נק')

ב. האם הטור מתכנס במידה שווה בתחום $x\ge 0$? **נמקו היטב**. (12 נק')

ג. כמה איברים של הטור צריך לסכום כדי שהשגיאה בהערכת הסכום בנקודה $x=10$ תהיה קטנה מ- 10^{-6}? (5 נק')

פתרון

א. הטור הנתון הוא טור לייבניץ לכל ערך של x ולכן הוא מתכנס על כל הישר. כדי לזהות את סכום הטור נשים לב שאם נגדיר $u=e^{-|x|}$ נוכל לכתוב את הטור בצורה: $\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n u^n}{n}=-\ln(1+u)=-\ln\left(1+e^{-|x|}\right)$.

ב. אי אפשר להשתמש במבחן M כי ההערכה הטובה ביותר תיתן $M_n=\frac{1}{n}$, כלומר את הטור ההרמוני המתבדר. אבל, מכיוון שמדובר בטור לייבניץ אנחנו יודעים שמתקיים: $|R_n(x)|\le|a_n(x)|=\frac{e^{-n|x|}}{n}\le\frac{1}{n}$. לכן, בהינתן $\varepsilon>0$ נגדיר $N=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$ ומתקיים שלכל $n>N$, $|R_n(x)|<\varepsilon$, והטור מתכנס במידה שווה. למעשה באותו האופן הוא מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

ג. הטור נתון ע"י: $-e^{-10}+\frac{e^{-20}}{2}+\ldots$. מכיוון שזהו טור לייבניץ מספיק לסכום עד (לא כולל) לאיבר שיהיה קטן מהערכת השגיאה שלנו, כלומר במקרה הנוכחי האיבר הראשון יספיק.